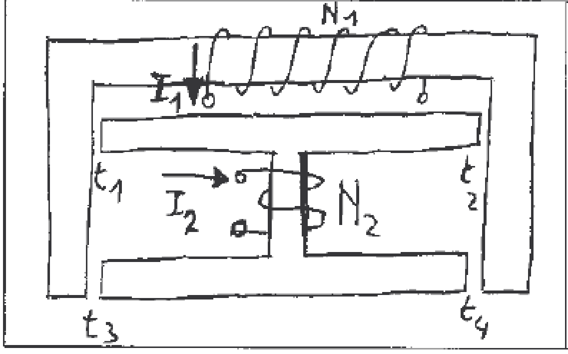
ESERCIZI CIRCUITI MAGNETICI

Dato il circuito magnetico di figura, che si suppone costituito da materiale di permeabilità magnetica infinita ($\mu_{Fe} = \infty$) immerso in aria ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ **H/m**) , con sezione **S=costante** anche nei traferri, si calcoli:

1) I coefficienti di autoinduzione L_1 ed L_2 dei due avvolgimenti di N_1 e N_2 spire
2) Il coefficiente di autoinduzione M_{12} , tra gli avvolgimenti di N_1 e N_2 spire



$N_1 = 120$
$N_2 = 180$
$t_1 = 4$ mm
$t_2 = 2$ mm
$t_3 = 2$ mm
$t_4 = 4$ mm

$S = 90$ cm^2

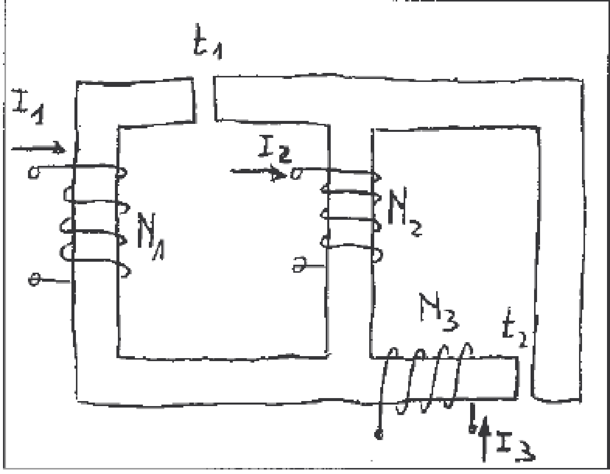
Risultati

L_1 = 0,061 H
L_2 = 0,137 H

M_{12} = 0,031 H

Dato il circuito magnetico di figura, che si suppone costituito da materiale di permeabilità magnetica infinita ($\mu_{Fe} = \infty$) immerso in aria ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ **H/m**) , con sezione **S=costante** anche nei tra ferri, si calcoli:

1) il coefficiente di autoinduzione L_1 , dell'avvolgimento di N_1 spire
2) il coefficiente di mutua induzione M_{13} tra gli avvolgimenti di N_1 e N_3 spire
3) l'energia complessivamente immagazzinata nel circuito.



$I_1 = 300$ mA
$I_2 = 400$ mA
$I_3 = 200$ mA

$N_1 = 80$
$N_2 = 60$
$N_3 = 50$
$t_1 = 0.4$ mm
$t_2 = 0.2$ mm
$S = 10$ cm^2

Risultati

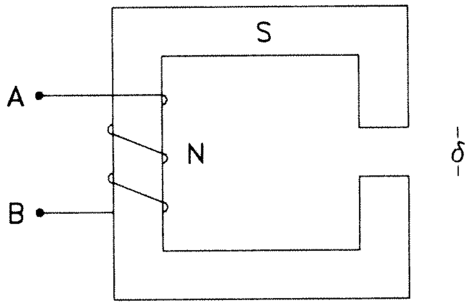
L_1 = 20,1 mH

M_{13} = 0

W_m = 616 µJ

IV.11 Circuiti magnetici

Esercizio 85

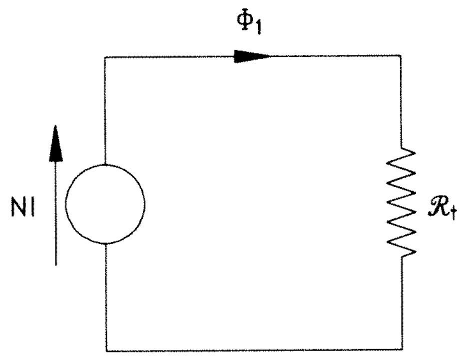


(a)

In fig. (a) è indicato lo schema di un bipolo costituito da un solenoide di N spire avvolte su un circuito magnetico costituito da un tratto in ferro e da un traferro. Indicando con S l'area della sezione retta del tratto in ferro e con δ lo spessore del traferro, calcolare l'induttanza L del bipolo A, B quando si trascurino la riluttanza del tratto in ferro ($\mu \to \infty$) e i flussi "dispersi".

Risposta

Nelle ipotesi semplificative fatte, il circuito elettrico equivalente, ai fini della determinazione del flusso Φ_1 attraverso una generica sezione del circuito magnetico, è quello indicato in fig. (b), nel quale la f.m.m. $N I$ è raffigurata come un generatore di tensione, il flusso Φ_1 è rappresentato dalla corrente circolante nel circuito, e la riluttanza $\mathcal{R}_t$ offerta dal traferro è rappresentata da una resistenza.



(b)

Essendo: $\mathcal{R}_t = \dfrac{\delta}{\mu_0 S}$, risulta subito:

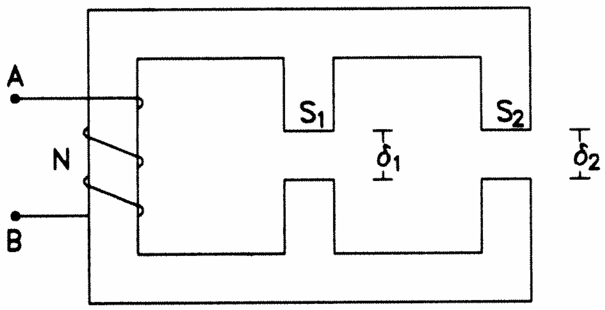
$$\Phi_1 = \frac{N I}{\mathcal{R}_t} = \frac{N I}{\delta} \mu_0 S .$$

Il flusso Φ_N concatenato con l'intero avvolgimento di N spire è:

$$\Phi_N = N \Phi_1 = \frac{N^2}{\delta} \mu_0 S ,$$

e l'induttanza L è quindi: $L = \dfrac{\Phi_N}{I} = \dfrac{N^2}{\mathcal{R}_t} = \mu_0 \dfrac{S}{\delta} N^2 .$

Esercizio 86



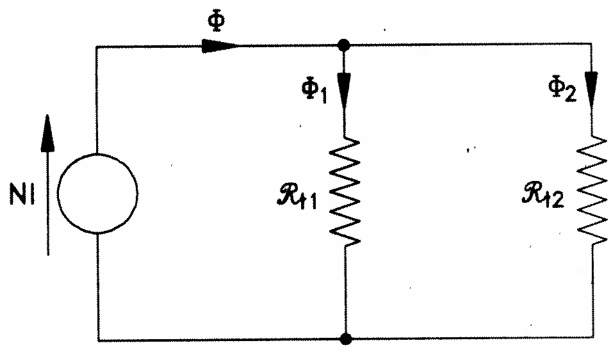
(a)

In fig. (a) è indicato lo schema di un bipolo costituito da un solenoide di N spire avvolte su un circuito magnetico; i dati geometrici del circuito magnetico sono indicati in fig. (a). Calcolare l'induttanza L del bipolo A, B quando si trascurino le riluttanze dei tratti in ferro e i flussi dispersi.

Risposta

Il circuito elettrico equivalente, ai fini del calcolo dei flussi nelle diverse sezioni del circuito magnetico, è quello indicato in fig. (b), con:

$$\mathcal{R}_{t1} = \frac{\delta_1}{\mu_0 S_1}, \; \mathcal{R}_{t2} = \frac{\delta_2}{\mu_0 S_2}.$$



(b)

Si ha, dunque:

$$\Phi_1 = \frac{NI}{\mathcal{R}_{t1}} = \frac{NI}{\delta_1} \mu_0 S_1,$$

$$\Phi_2 = \frac{NI}{\mathcal{R}_{t2}} = \frac{NI}{\delta_2} \mu_0 S_2,$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \mu_0 N I \left(\frac{S_1}{\delta_1} + \frac{S_2}{\delta_2} \right).$$

Il flusso Φ_N concatenato con l'intero avvolgimento di N spire è:

$$\Phi_N = N\Phi,$$

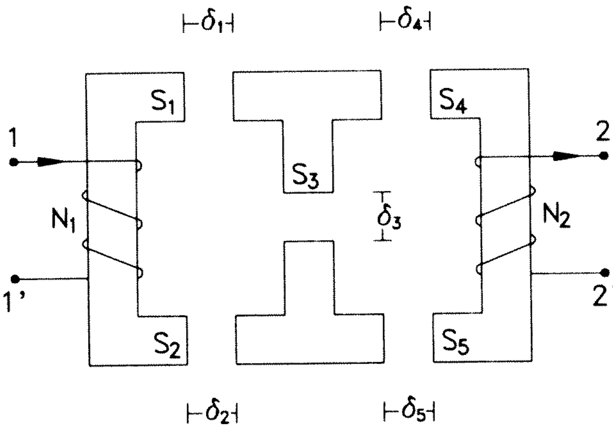
e l'induttanza L è, quindi:

$$L = \frac{\Phi_N}{I} = \mu_0 N^2 \left(\frac{S_1}{\delta_1} + \frac{S_2}{\delta_2} \right) = \frac{N^2}{\mathcal{R}_{te}},$$

avendo indicato con $\mathcal{R}_{te}$ la riluttanza equivalente del "parallelo" tra $\mathcal{R}_{t1}$ e $\mathcal{R}_{t2}$:

$$\mathcal{R}_{te} = \frac{\mathcal{R}_{t1} \cdot \mathcal{R}_{t2}}{\mathcal{R}_{t1} + \mathcal{R}_{t2}}.$$

Esercizio 87



(a)

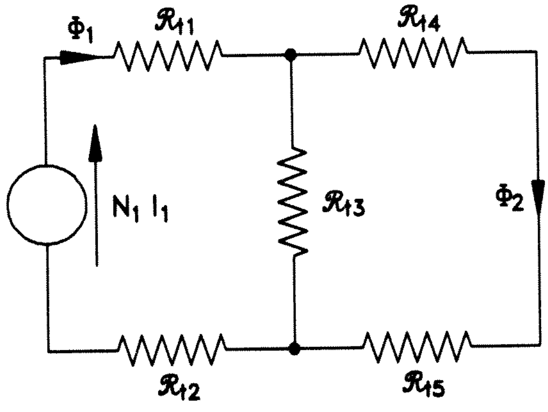
In fig. (a) è indicato lo schema di due circuiti accoppiati costituiti da due solenoidi di N_1 e N_2 spire avvolti su un circuito magnetico, i cui dati geometrici sono indicati in fig. (a). Calcolare i coefficienti di autoinduzione L_1 e L_2 dei due circuiti, e il coefficiente di mutua induzione M, nell'ipotesi di poter trascurare le riluttanze dei tratti in ferro e i flussi dispersi.

Risposta

Il circuito elettrico equivalente ai fini del calcolo di L_1 è quello indicato in fig. (b), con:

$$\mathcal{R}_{t1} = \frac{\delta_1}{\mu_0 S_1}, \ \mathcal{R}_{t2} = \frac{\delta_2}{\mu_0 S_2}, \ \mathcal{R}_{t3} = \frac{\delta_3}{\mu_0 S_3},$$

$$\mathcal{R}_{t4} = \frac{\delta_4}{\mu_0 S_4}, \ \mathcal{R}_{t5} = \frac{\delta_5}{\mu_0 S_5}.$$



(b)

La resistenza equivalente $\mathcal{R}_e$ "vista" dal generatore è:

$$\mathcal{R}_e = \mathcal{R}_{t1} + \mathcal{R}_{t2} + \frac{\mathcal{R}_{t3}\,(\mathcal{R}_{t4} + \mathcal{R}_{t5})}{\mathcal{R}_{t3} + \mathcal{R}_{t4} + \mathcal{R}_{t5}}\,;$$

il flusso Φ_1 è, dunque, pari a:

$$\Phi_1 = \frac{N_1 I_1}{\mathcal{R}_e}\,,$$

e il coefficiente di autoinduzione L_1 è:

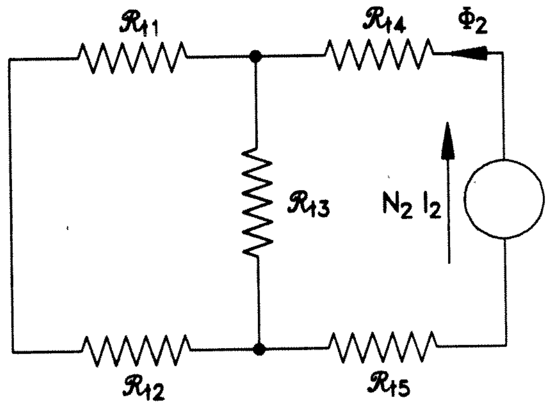
$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_1}{I_1} = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_e}\,.$$

Per calcolare L_2, il circuito elettrico equivalente è quello di fig. (c), e si ha, analogamente:

$$L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}'_e}\,,$$

con:

$$\mathcal{R}'_e = \mathcal{R}_{t4} + \mathcal{R}_{t5} + \frac{\mathcal{R}_{t3}\,(\mathcal{R}_{t1} + \mathcal{R}_{t2})}{\mathcal{R}_{t3} + \mathcal{R}_{t1} + \mathcal{R}_{t2}}\,.$$



(c)

Infine, per calcolare M, possiamo ricorrere indifferentemente all'uno o all'altro degli schemi (b) e (c). Utilizzando, ad es., quello di fig. (b), dobbiamo calcolare la "corrente" che circola nella serie $\mathcal{R}_{t4}$, $\mathcal{R}_{t5}$, indicata con Φ_2 in fig. (b). Si ha subito:

$$\Phi_2 = \Phi_1 \, \frac{\mathcal{R}_{t3}}{\mathcal{R}_{t3} + \mathcal{R}_{t4} + \mathcal{R}_{t5}} = \frac{N_1 I_1}{\mathcal{R}_e} \, \frac{\mathcal{R}_{t3}}{\mathcal{R}_{t3} + \mathcal{R}_{t4} + \mathcal{R}_{t5}}\,;$$

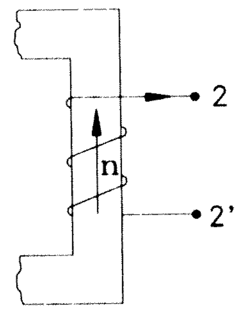
osserviamo subito, però, che il flusso concatenato con una generica spira dell'avvolgimento secondario deve essere riferito a una normale $\boldsymbol{n}$ orientata congruentemente con il verso di riferimento assunto per il circuito; ne segue che deve essere orientata come in fig. (d).

Il verso assunto per Φ_2 in fig. (b) è dunque *opposto* a quello di $\boldsymbol{n}$; si ha quindi:

$$\Phi'_2 = -\Phi_2 ,$$

avendo indicato con Φ'_2 il flusso concatenato con *una* spira dell'avvolgimento secondario. Il flusso totale concatenato col secondario è allora pari a $N_2\,\Phi'_2$, e il coefficiente di mutua induzione M è (in modulo e segno):

$$M = \frac{N_2\,\Phi'_2}{I_1} = -\frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_e}\;\frac{\mathcal{R}_{t3}}{\mathcal{R}_{t3} + \mathcal{R}_{t4} + \mathcal{R}_{t5}} .$$

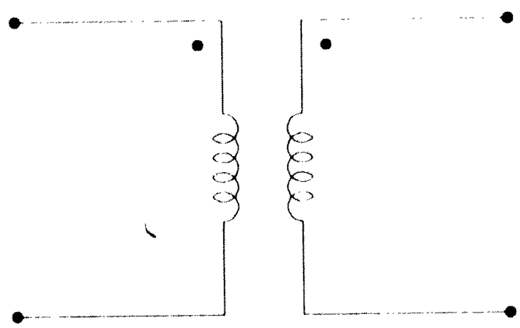


(d)

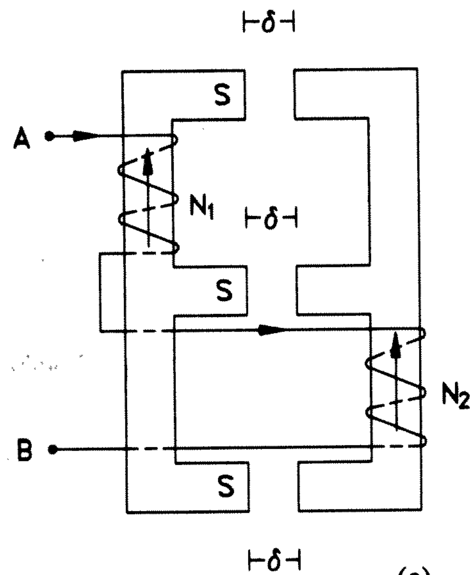
A titolo di esercizio, il lettore verifichi che, utilizzando per il calcolo di M lo schema di fig. (c), si perviene allo stesso risultato. Il lettore verifichi, inoltre, che l'accoppiamento *non* è perfetto.

Osservazione:

Volendo rappresentare i due circuiti accoppiati di fig. (a) con il simbolo grafico solitamente usato, lo schema è quello di fig. (e); si noti che i due "pallini" che indicano il modo in cui valutare il segno di M sono messi in modo che, con le convenzioni di segno assunte per le correnti in fig. (a), M risulta *negativo*, come è stato dimostrato che è (sulla base della conoscenza dei modi in cui i due solenoidi sono avvolti).


(e)

Esercizio 88



(a)

Calcolare il coefficiente di autoinduzione del bipolo *A, B* indicato in fig. (a), assumendo le solite ipotesi semplificative.

Risposta

Tenendo conto del modo in cui i due tratti (di N_1 e N_2 spire) sono avvolti, lo schema elettrico equivalente per calcolare L è quello indicato in fig. (b), con $\mathcal{R}_t = \dfrac{\delta}{\mu_0 S}$. Con le convenzioni di segno assunte in fig. (b), il flusso totale concatenato con l'avvolgimento *A, B* è:

$$\Phi = N_1\, \Phi_1 + N_2\, \Phi'_1 .$$

Risolvendo la rete, si ha:

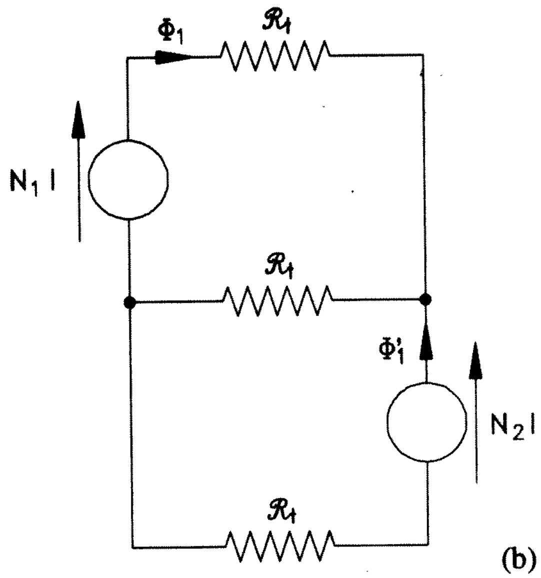
$$\begin{cases} \Phi_1 = \dfrac{(2\,N_1 - N_2)\, I}{3\, \mathcal{R}_t}, \\ \Phi'_1 = \dfrac{(2\,N_2 - N_1)\, I}{3\, \mathcal{R}_t}, \end{cases}$$

e quindi:

$$\Phi = \frac{N_1\,(2\,N_1 - N_2)}{3\,\mathcal{R}_t}\, I + \frac{N_2\,(2\,N_2 - N_1)}{3\,\mathcal{R}_t}\, I$$

e infine:

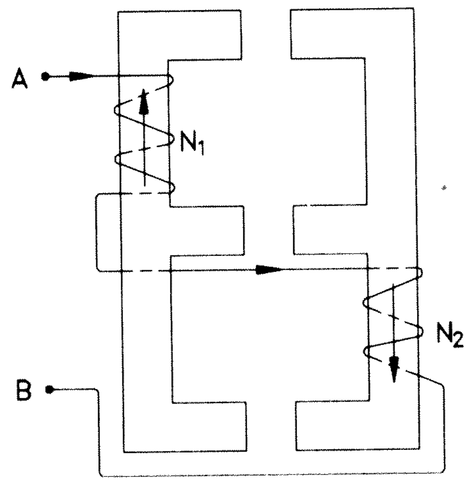
$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{2}{3}\,\frac{N_1^2 + N_2^2 - N_1\,N_2}{\mathcal{R}_t} .$$



(b)

Esercizio 89

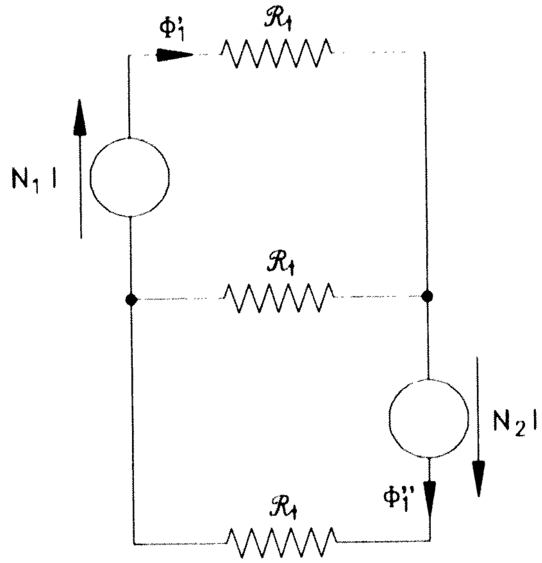
Calcolare il coefficiente di autoinduzine del bipolo A, B che si ottiene da quello dell'es. precedente invertendo il verso di avvolgimento del solo tratto di N_2 spire, come mostrato in fig. (a).



(a)

Risposta

Lo schema equivalente è ora quello di fig. (b). Per esso, si ha:



(b)

$$\begin{cases} \Phi'_1 = \dfrac{(2\,N_1 + N_2)}{3\,\mathcal{R}_t}\;I \\ \Phi''_1 = \dfrac{(2\,N_2 + N_1)}{3\,\mathcal{R}_t}\;I, \end{cases}$$

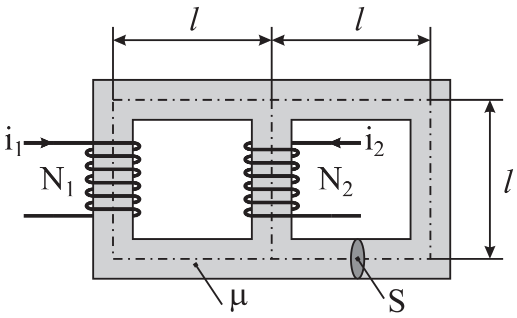
e quindi:

$$\Phi = N_1\,\Phi'_1 + N_2\,\Phi''_1 = \left[\frac{N_1\,(2\,N_1 + N_2)}{3\,\mathcal{R}_t} + \frac{N_2\,(2\,N_2 + N_1)}{3\,\mathcal{R}_t}\right] I,$$

e infine:

$$L' = \frac{\Phi}{I} = \frac{2}{3}\;\frac{N_1^2 + N_2^2 + N_1\,N_2}{\mathcal{R}_t}.$$

Esercizio n. 1

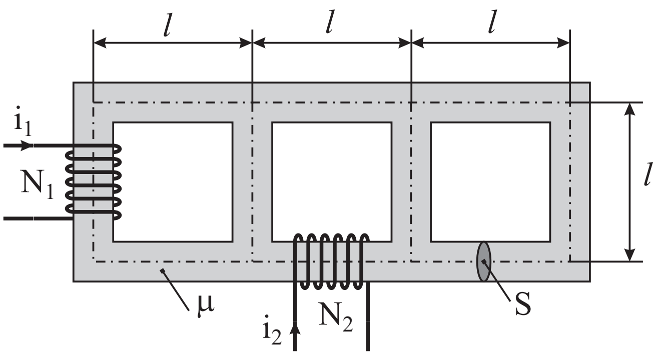


Determinare i coefficienti di auto e mutua induzione dei due avvolgimenti.

Risultati

$L_1 = \dfrac{4\mu S N_1^2}{15l} \quad L_2 = \dfrac{2\mu S N_2^2}{5l} \quad M = \dfrac{\mu S N_1 N_2}{5l}$

Esercizio n. 2

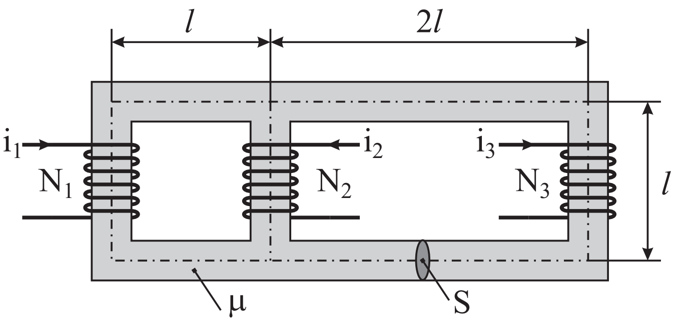


Determinare i coefficienti di auto e mutua induzione dei due avvolgimenti.

Risultati

$L_1 = \dfrac{15\mu S N_1^2}{56l} \quad L_2 = \dfrac{2\mu S N_2^2}{7l} \quad M = \dfrac{\mu S N_1 N_2}{14l}$

Esercizio n. 3



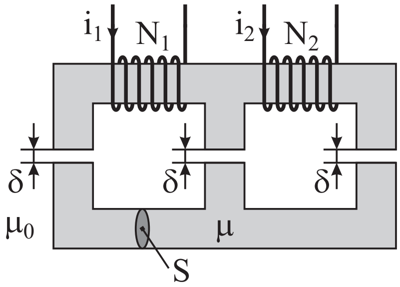
Determinare i coefficienti di auto e mutua induzione dei tre avvolgimenti.

Risultati

$L_1 = \dfrac{6\mu S N_1^2}{23l} \quad L_2 = \dfrac{8\mu S N_2^2}{23l} \quad L_3 = \dfrac{4\mu S N_3^2}{23l}$

$M_{12} = \dfrac{5\mu S N_1 N_2}{23l} \quad M_{13} = -\dfrac{\mu S N_1 N_3}{23l} \quad M_{23} = \dfrac{3\mu S N_2 N_3}{23l}$

Esercizio n. 4

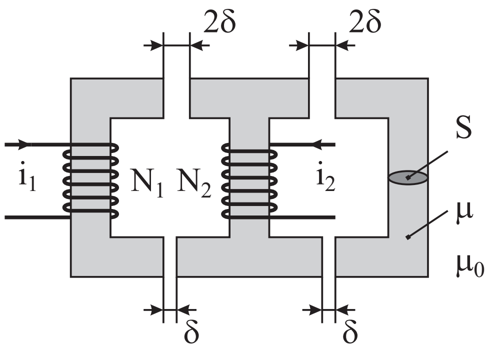


Assumendo che la permeabilità μ del materiale ferromagnetico sia praticamente infinita, determinare i coefficienti di auto e mutua induzione dei due avvolgimenti.

Risultati

$$L_1 = \frac{2N_1^2}{3\Re_0} \qquad L_2 = \frac{2N_2^2}{3\Re_0} \qquad M = \frac{N_1 N_2}{3\Re_0} \qquad \left(\Re_0 = \frac{\delta}{\mu_0 S}\right)$$

Esercizio n. 5

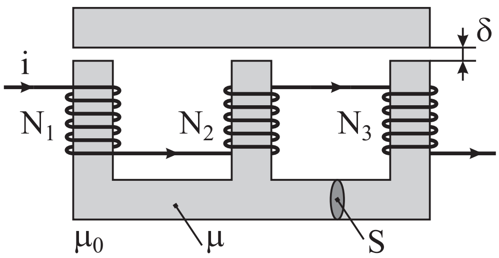


Assumendo che la permeabilità μ del materiale ferromagnetico sia praticamente infinita, determinare i coefficienti di auto e mutua induzione dei due avvolgimenti.

Risultati

$$L_1 = \frac{N_1^2}{3\Re_0} \qquad L_2 = \frac{2N_2^2}{3\Re_0} \qquad M = \frac{N_1 N_2}{3\Re_0} \qquad \left(\Re_0 = \frac{\delta}{\mu_0 S}\right)$$

Esercizio n. 6

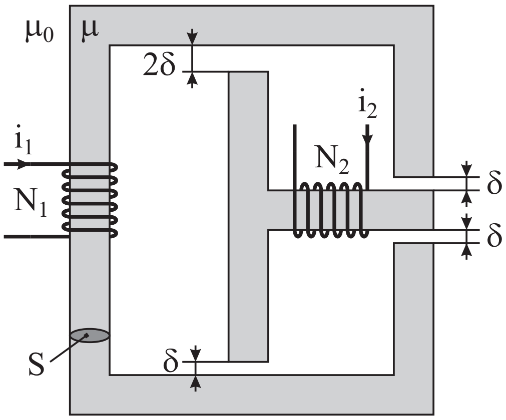


Assumendo che la permeabilità μ del materiale ferromagnetico sia praticamente infinita, determinare l'induttanza dell'avvolgimento.

Risultato

$$L = \frac{2(N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 + N_1 N_2 + N_1 N_3 - N_2 N_3)}{3\Re_0} \qquad \left(\Re_0 = \frac{\delta}{\mu_0 S}\right)$$

Esercizio n. 7

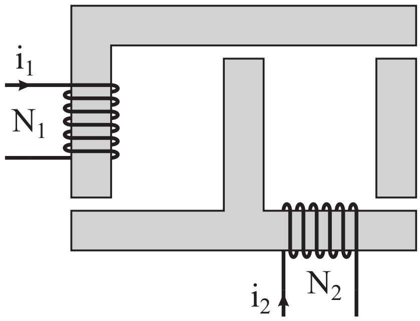


Assumendo che la permeabilità μ del materiale ferromagnetico sia praticamente infinita, determinare i coefficienti di auto e mutua induzione dei due avvolgimenti.

Risultati

$$L_1 = \frac{6N_1^2}{7\Re_0} \qquad L_2 = \frac{6N_2^2}{7\Re_0} \qquad M = \frac{N_1 N_2}{7\Re_0} \qquad \left(\Re_0 = \frac{\delta}{\mu_0 S}\right)$$

Esercizio n. 8

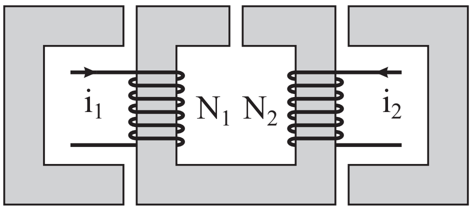


Assumendo che tutti i traferri abbiano riluttanza uguale a $\Re_0$ e che le riluttanze dei tratti in materiale ferromagnetico siano trascurabili, determinare i coefficienti di auto e mutua induzione dei due avvolgimenti.

Risultati

$$L_1 = \frac{3N_1^2}{5\Re_0} \qquad L_2 = \frac{2N_2^2}{5\Re_0} \qquad M = \frac{N_1 N_2}{5\Re_0}$$

Esercizio n. 9

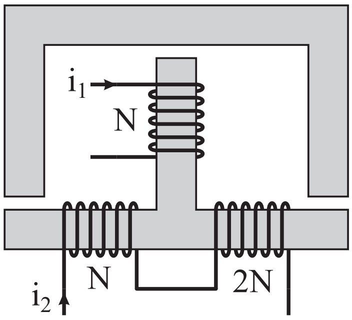


Assumendo che tutti i traferri abbiano riluttanza uguale a $\Re_0$ e che le riluttanze dei tratti in materiale ferromagnetico siano trascurabili, determinare i coefficienti di auto e mutua induzione dei due avvolgimenti.

Risultati

$$L_1 = \frac{3N_1^2}{2\Re_0} \qquad L_2 = \frac{3N_2^2}{2\Re_0} \qquad M = \frac{N_1 N_2}{\Re_0}$$

Esercizio n. 10

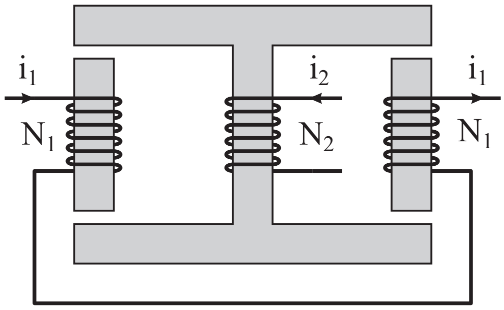


Assumendo che tutti i traferri abbiano riluttanza uguale a $\Re_0$ e che le riluttanze dei tratti in materiale ferromagnetico siano trascurabili, determinare i coefficienti di auto e mutua induzione dei due avvolgimenti.

Risultati

$$L_1 = \frac{2N^2}{3\Re_0} \qquad L_2 = \frac{14N^2}{3\Re_0} \qquad M = \frac{N^2}{3\Re_0}$$

Esercizio n. 11

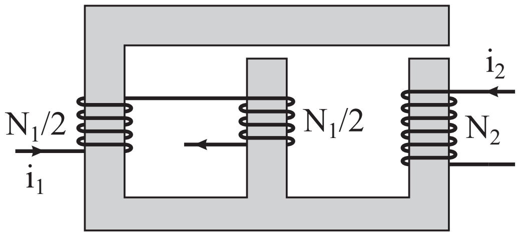


Assumendo che tutti i traferri abbiano riluttanza uguale a $\Re_0$ e che le riluttanze dei tratti in materiale ferromagnetico siano trascurabili, determinare i coefficienti di auto e mutua induzione dei due avvolgimenti.

Risultati

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\Re_0} \qquad L_2 = \frac{N_2^2}{\Re_0} \qquad M = \frac{N_1 N_2}{\Re_0}$$

Esercizio n. 12



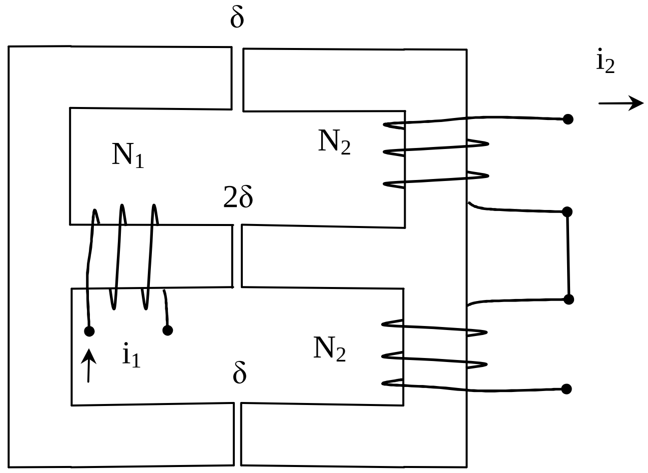
Assumendo che tutti i traferri abbiano riluttanza uguale a $\Re_0$ e che le riluttanze dei tratti in materiale ferromagnetico siano trascurabili, determinare i coefficienti di auto e mutua induzione dei due avvolgimenti.

Risultati

$$L_1 = \frac{5N_1^2}{4\Re_0} \qquad L_2 = \frac{N_2^2}{\Re_0} \qquad M = \frac{N_1 N_2}{2\Re_0}$$

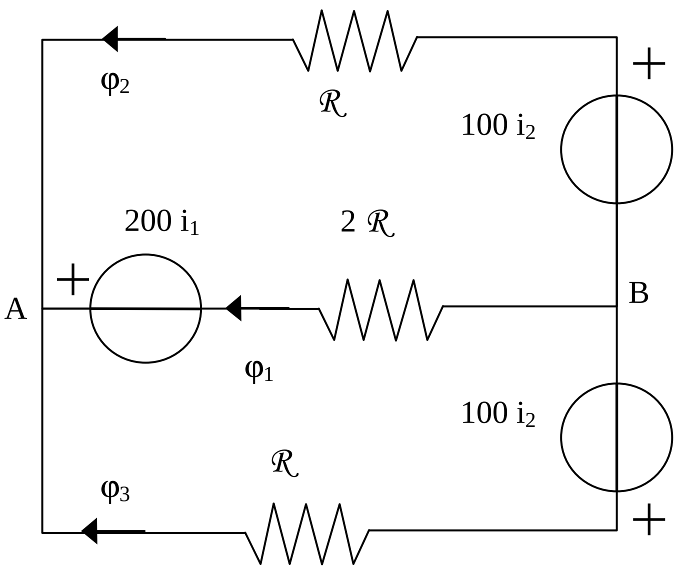
Esercizi sui circuiti magnetici

Esercizio 1. Nel circuito magnetico illustrato calcolare, trascurando la riluttanza del ferro, i coefficienti di auto induzione degli avvolgimenti 1 e 2 e il coefficiente di mutua induzione tra i due avvolgimenti (la sezione del circuito magnetico è 8 cm^2, δ = 0.3 mm, N_1 = 200, N_2 = 100).



Soluzione

Il circuito equivalente “elettrico” si deduce immediatamente dalle linee d’asse dei gioghi e delle colonne del circuito magnetico. La riluttanza $\mathcal{R}$ del traferro di spessore δ è calcolabile come:



$$\mathcal{R} = \frac{\delta}{\mu_0 S} = 2.984 \times 10^5\ \mathrm{H}^{-1}$$

Le forze magnetomotrici si deducono, per quanto riguarda il modulo, dal prodotto del numero di spire nell’avvolgimento per la corrente che le attraversa e, per quanto riguarda il verso, con la regola della vite destrogira, tenuto conto dei versi assegnati per le correnti.

Il circuito è costituito da N = 2 nodi e R= 3 rami in parallelo. La tensione “magnetica” tra i due nodi del circuito è calcolabile direttamente utilizzando il Teorema di Millman:

$$\psi_{AB} = \frac{\dfrac{100 i_2}{\mathcal{R}} + \dfrac{200 i_1}{2\mathcal{R}} + \dfrac{100 i_2}{\mathcal{R}}}{\dfrac{1}{\mathcal{R}} + \dfrac{1}{2\mathcal{R}} + \dfrac{1}{\mathcal{R}}} = 40 i_1 + 80 i_2$$

Dalle caratteristiche dei tre rami si deducono quindi direttamente i flussi su ogni ramo:

$$\begin{cases} \psi_{AB} = 100 i_2 - \mathcal{R}\varphi_2 \\ \psi_{AB} = 200 i_1 - 2\mathcal{R}\varphi_1 \\ \psi_{AB} = 100 i_2 - \mathcal{R}\varphi_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = (80 i_1 - 40 i_2)/\mathcal{R} \\ \varphi_2 = \varphi_3 = (-40 i_1 + 20 i_2)/\mathcal{R} \end{cases}$$

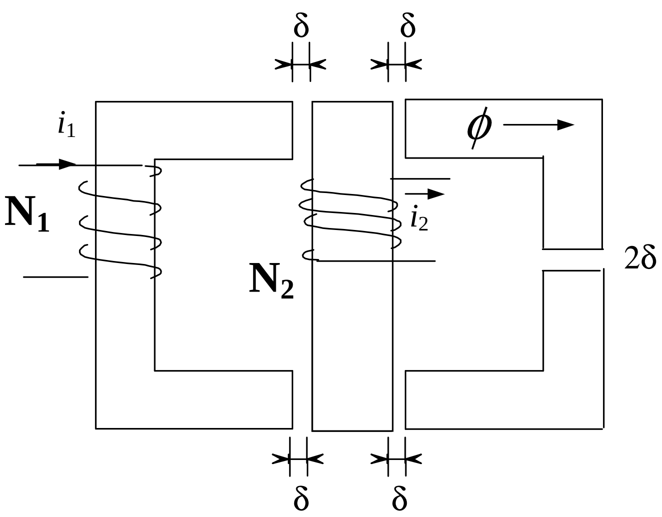
I flussi concatenati ai due avvolgimenti, con i versi di riferimento scelti, sono dati da:

$$\Phi_{c,1} = 200\ \varphi_1 \ , \qquad \Phi_{c,2} = 100\ \varphi_2 + 100\ \varphi_3$$

I coefficienti di auto e mutua induzione si calcolano quindi direttamente dalle definizioni:

$$L_1 = \left.\frac{\Phi_{c,1}}{i_1}\right|_{i_2=0} = 53.6\,\text{mH} \qquad M = \left.\frac{\Phi_{c,1}}{i_2}\right|_{i_1=0} = 26.8\,\text{mH} \qquad L_2 = \left.\frac{\Phi_{c,2}}{i_2}\right|_{i_2=0} = 13.4\,\text{mH}$$

Esercizio 2. Trascurando la riluttanza del ferro nel circuito magnetico illustrato, calcolare i coefficienti di auto induzione degli avvolgimenti 1 e 2 e il coefficiente di mutua induzione tra i due avvolgimenti (la sezione del circuito magnetico è 6 cm^2, δ = 1 mm, N_1 = 100, N_2 = 200)

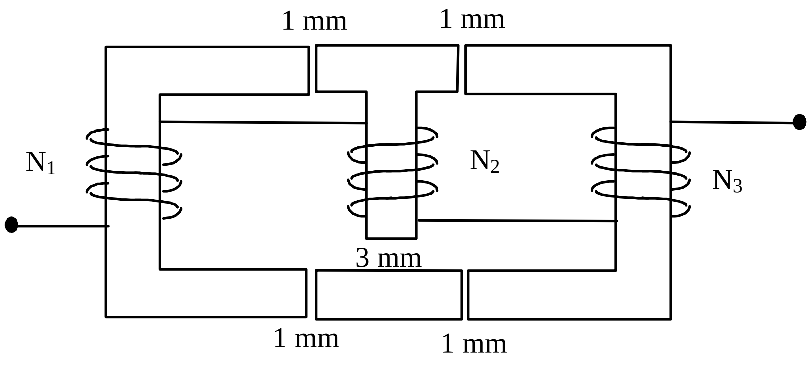


L_1 = 3.77 mH $\qquad$ L_2 = 22.6 mH $\qquad$ M_{12} = 7.54 mH

Esercizio 3. Per lo stesso circuito magnetico dell'esercizio precedente, calcolare il valore del flusso di induzione magnetica ϕ con il verso di riferimento indicato in figura supponendo che gli avvolgimenti siano percorsi dalle correnti i_1 = –2 A e i_2 = 4 A.

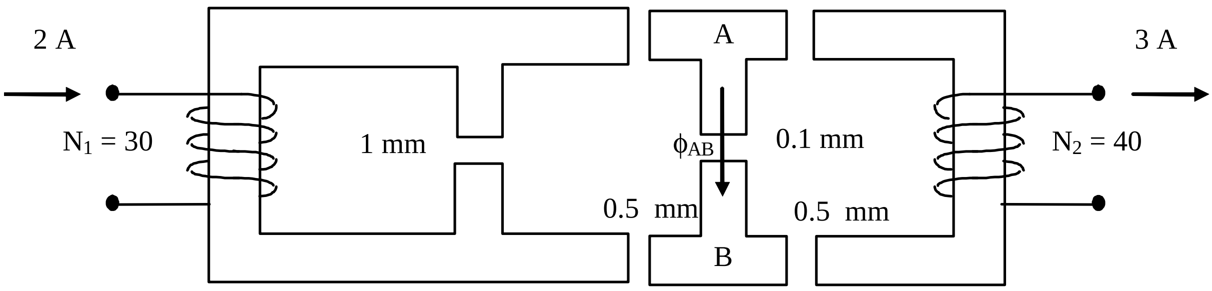
ϕ = – 0.15 mWb

Esercizio 4. Determinare il coefficiente di autoinduzione L dell'avvolgimento illustrato (la sezione del circuito magnetico è 16 cm^2, $N_1 = N_3$ = 30, N_2 = 10).



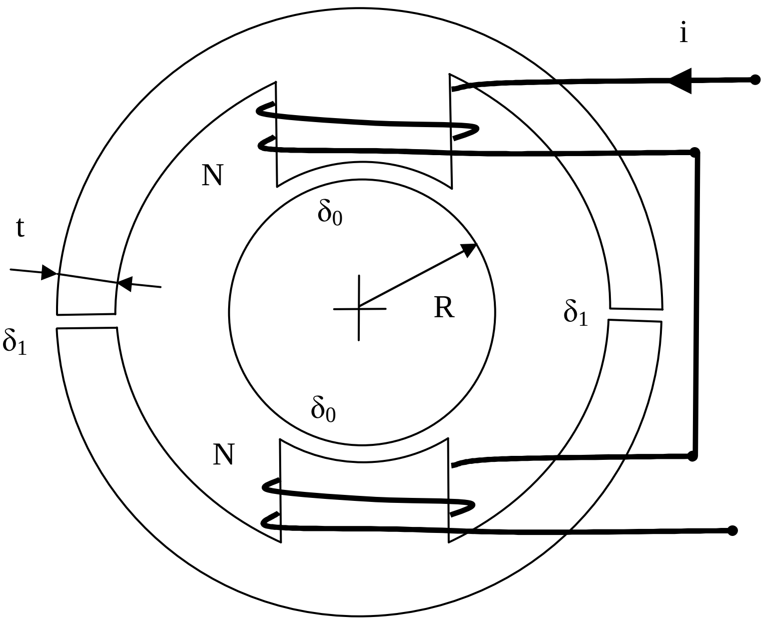
L = 0.2 mH

Esercizio 5. Trascurando la riluttanza dei tratti in ferro, calcolare il flusso sul ramo AB del circuito magnetico assegnato (sezione 10 cm^2)



ϕ_{AB} = 0.19 mWb

Esercizio 6. Trascurando la riluttanza del ferro nel circuito magnetico illustrato in sezione calcolare il coefficiente di auto induzione dell'avvolgimento (la lunghezza assiale è 20 cm, il raggio del cilindro interno è R = 50 mm, l'apertura angolare di ogni polo 60°, δ_0 = 1 mm, δ_1 = 0.1 mm, t =10 mm, N = 100)

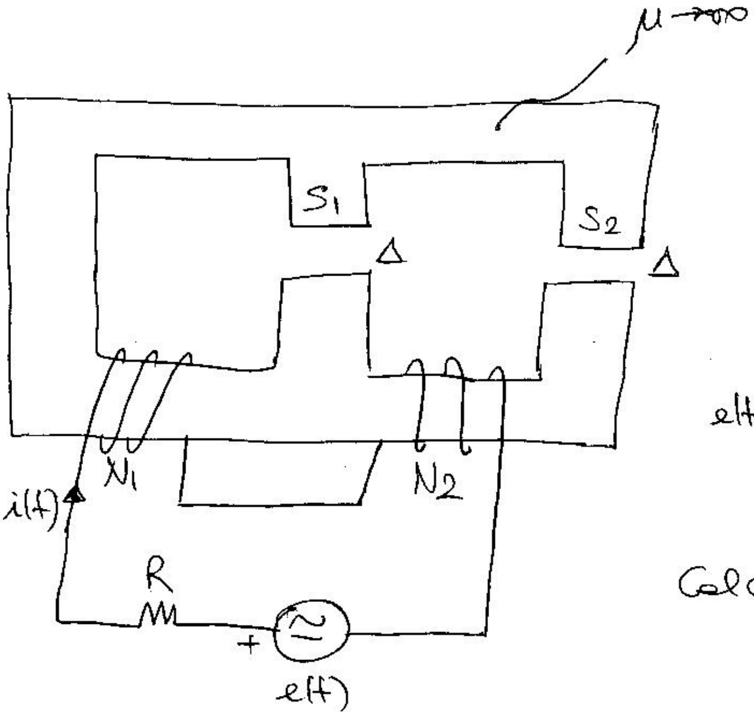


L = 233 mH

Esercizio 7. Per lo stesso circuito magnetico dell'esercizio precedente, calcolare il valore del campo di induzione magnetica nei traferri δ_0 supponendo che l'avvolgimento sia percorso dalla corrente i = 2 A .

B = 0.22 T

Esercizio 1



$\Delta = 1\,mm$

$S_1 = 10\,cm^2$

$S_2 = 2 S_1$

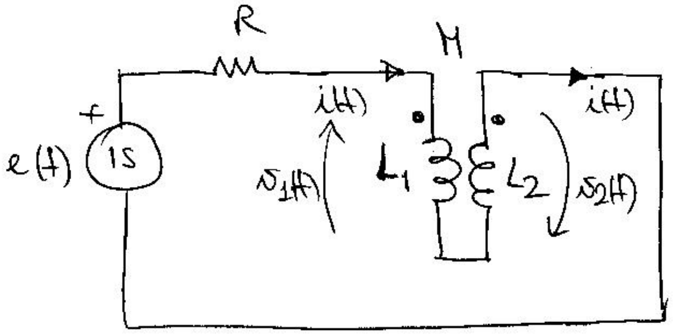
$N_1 = 100 \quad N_2 = 50$

$e(t) = 10\sqrt{2}\,\text{sen}\,(1000t)\ V$

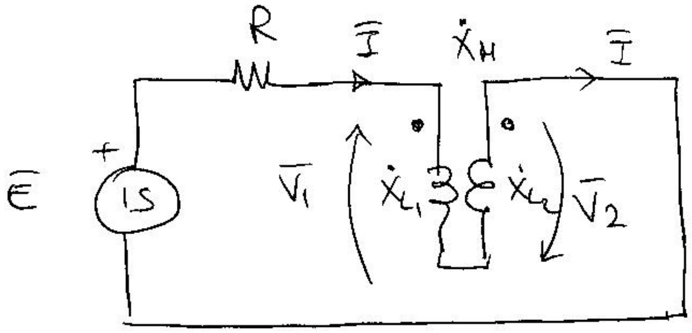
$R = 5\,\Omega$

Calcolare $i(t)$

Circuito elettrico:



Dominio Fasoriale



$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 = \bar{I}$

$\bar{E} = 10\ V$

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I} - j\omega |M| \bar{I} \\ \bar{V}_2 = -j\omega |M| \bar{I} + j\omega L_2 \bar{I} \\ \bar{E} - R\bar{I} - \bar{V}_1 - \bar{V}_2 = 0 \end{cases}$$

caratteristica degli induttori accoppiati

LKT

$$\Downarrow$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\left(X_{L_1} + X_{L_2} - 2|X_M|\right)}$$

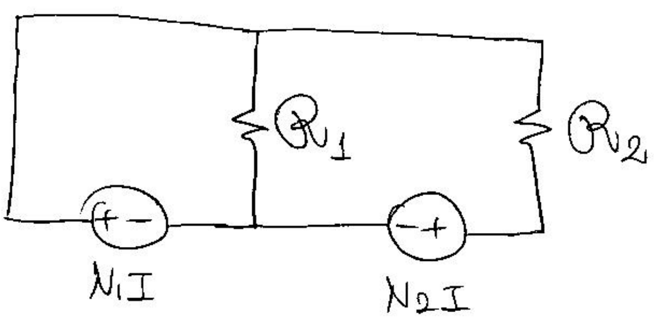
$X_{L_1} = \omega L_1$

$X_{L_2} = \omega L_2$ con $\omega = 1000\ rad/s$

$|X_M| = \omega |M|$

È necessario calcolare i coefficienti di auto e mutua induzione L_1, L_2, M

Ricaviamo tali coefficienti utilizzando il CIRCUITO ELETTRICO ASSOCIATO AL CIRCUITO MAGNETICO



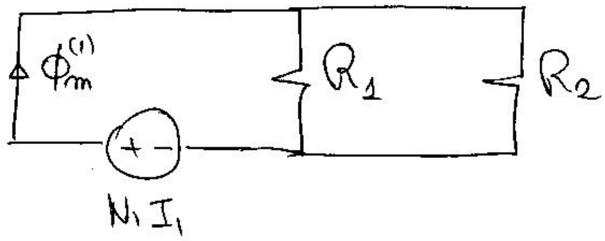
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ H/m$

$$\mathcal{R}_1 = \frac{\Delta}{\mu_0 S_1} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 (10^{-2})^2} = \frac{\cancel{10^{-3}}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \cancel{10 \cdot 10^{-4}}} = 7.95 \cdot 10^5 \left[\frac{1}{H}\right]$$

$$R_2 = \frac{\Delta}{\mu_0 S_2} = \frac{10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10 (10^{-2})^2} = 3.98 \cdot 10^5 \left[\frac{1}{H}\right]$$

- CALCOLO L_1

$$L_1 = \frac{\Phi_{11}}{I_1}\bigg|_{I_2=0} = \frac{N_1 \Phi_m^{(1)}}{I_1}\bigg|_{I_2=0}$$

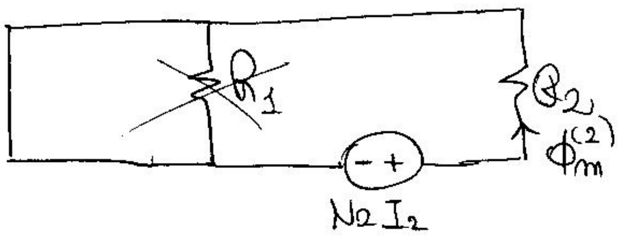


$$\Phi_m^{(1)} = \frac{N_1 I_1}{R_1 // R_2} \Rightarrow L_1 = \frac{N_1^2}{R_1 // R_2}$$

$$L_1 = \frac{N_1^2 \, (R_1 + R_2)}{R_1 \cdot R_2} = 0.038 = 38 \, mH$$

- CALCOLO L_2

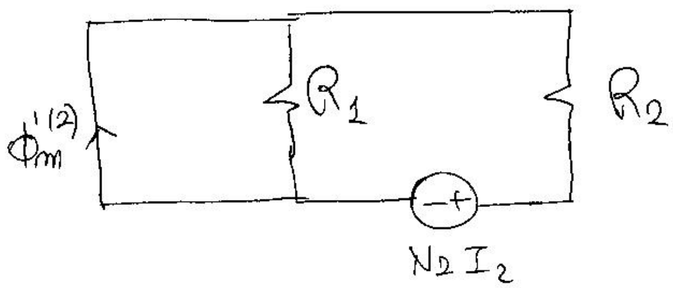
$$L_2 = \frac{\Phi_{22}}{I_2}\bigg|_{I_1=0} = \frac{N_2 \Phi_m^{(2)}}{I_2}\bigg|_{I_1=0}$$



$$\phi_m^{(2)} = \frac{N_2 I_2}{\mathcal{R}_2} \Rightarrow L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_2} = 6.3 \text{ mH}$$

• CALCOLO M

$$M_{12} = \left.\frac{\phi_{12}}{I_2}\right|_{I_1=0} = \left.\frac{N_1 \phi_m^{1(2)}}{I_2}\right|_{I_1=0}$$



$$\phi_m^{1(2)} = -\frac{N_2 I_2}{\mathcal{R}_2}$$

$$|M| = \left|\frac{N_1 \phi_m^{1(2)}}{I_2}\right| = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_2} = 12.6 \text{ mH}$$

$L_1 = 38 \text{ mH}$

$L_2 = 6.3 \text{ mH}$

$|M| = 12.6 \text{ mH}$

$$X_{L_1} = \omega L_1 = 38\ \Omega$$

$$X_{L_2} = \omega L_2 = 6.3\ \Omega$$

$$|X_M| = \omega |M| = 12.6\ \Omega$$

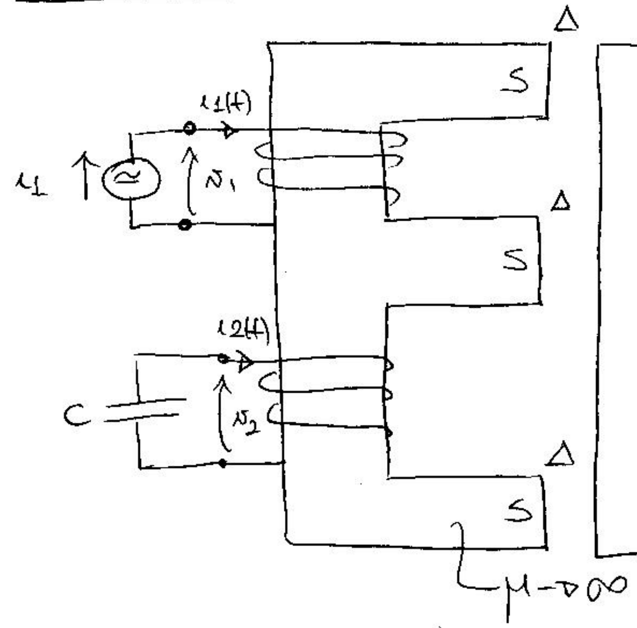
$$\Downarrow$$

$$\bar{I} = \frac{10}{5 + j\left(38 + 6.3 - 2 \cdot 12.6\right)} = 0.13 - j\,0.49\ \text{A}$$

$$\bar{I} = 0.50 \angle -75.33^\circ$$

$$i(t) = 0.5\sqrt{2}\,\sin\left(1000t - 75.33^\circ\right)$$

Esercizio 2



$i_1(t) = 2\sqrt{2} \sin 1000t$ A

$C = 0.1$ mF

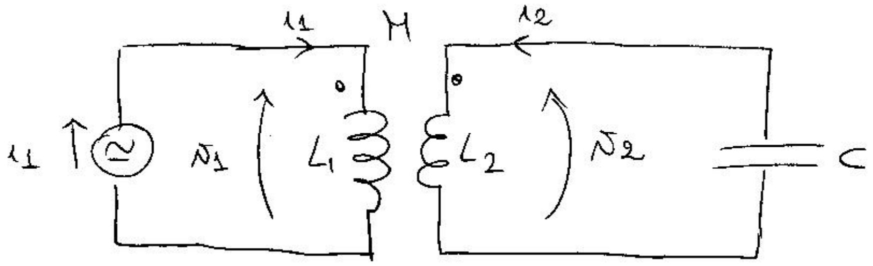
$\Delta = 1$ mm

$S = 10\,\text{cm}^2$

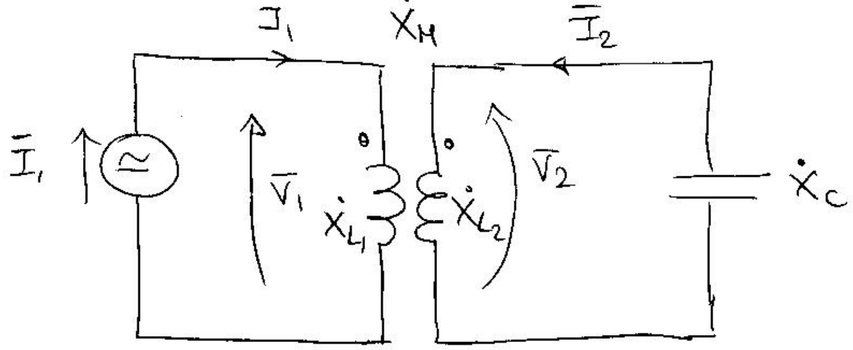
$N_1 = 200 \quad N_2 = 400$

Calcolare $i_2(t)$, $v_2(t)$, $v_1(t)$

Circuito elettrico:



Dominio fasoriale



$\bar{I}_1 = 2$ A $\qquad X_C = \frac{1}{\omega C} = 10\,\Omega$

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega |M| \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = j\omega |M| \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = j X_c \bar{I}_2 \\ \bar{I}_1 = 2A \end{cases}$$

caratteristica del trasformatore

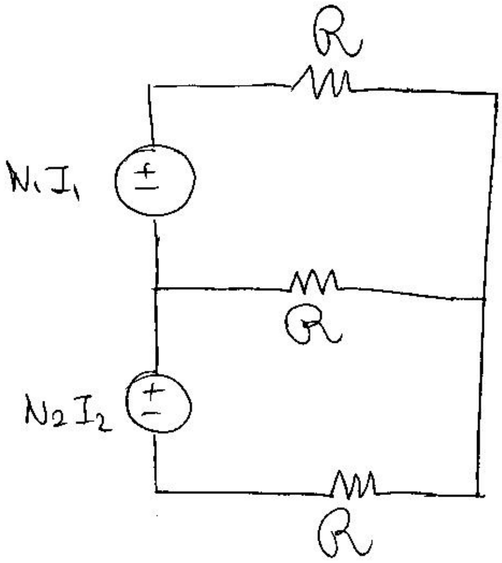
LKT

VINCOLO

Sistema di 3 EQUAZIONI
IN 3 INCOGNITE

È necessario conoscere i coefficienti di auto e mutua induzione L_1, L_2, M

Ricaviamo tali coefficienti utilizzando il CIRCUITO ELETTRICO ASSOCIATO AL CIRCUITO MAGNETICO

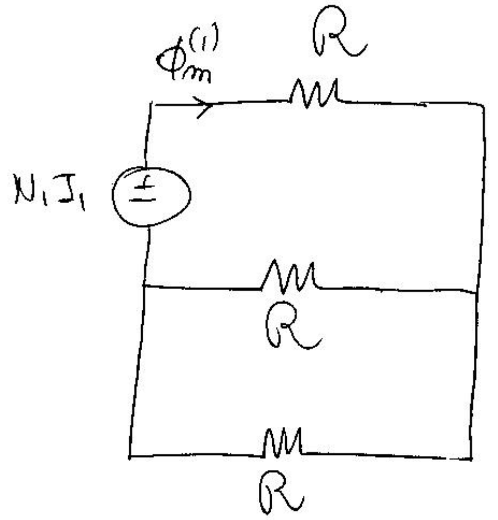


$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m

$$\mathcal{R} = \frac{\Delta}{\mu_0 S} = 7.95 \cdot 10^5 \left[\frac{1}{H}\right]$$

- CALCOLO L_1

$$L_1 = \left.\frac{\Phi_{11}}{I_1}\right|_{I_2=0} = \left.\frac{N_1 \Phi_m^{(1)}}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

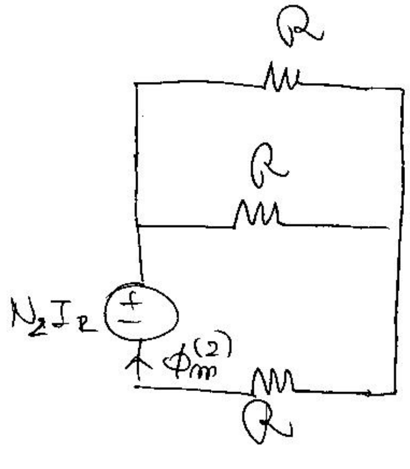


$$\Phi_m^{(1)} = \frac{N_1 I_1}{\frac{R}{2}+R} = \frac{2 N_1 I_1}{3R}$$

$$L_1 = \frac{2 N_1^2}{3R} = 33.5 mH$$

- CALCOLO L_2

$$L_2 = \left.\frac{\Phi_{22}}{I_2}\right|_{I_1=0} = \left.\frac{N_2 \Phi_m^{(2)}}{I_2}\right|_{I_1=0}$$

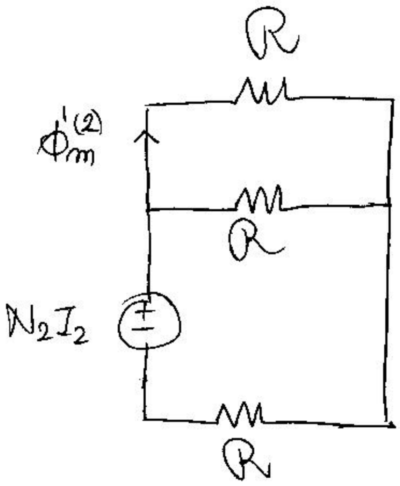


$$\Phi_m^{(2)} = \frac{N_2 I_2}{\frac{R}{2}+R} = \frac{2 N_2 I_2}{3R}$$

$$L_2 = \frac{2 N_2^2}{3R} = 268 mH$$

• CALCOLO M

$$M_{12} = \left.\frac{\Phi_{12}}{I_2}\right|_{I_1=0} = \left.\frac{N_1 \Phi_m'^{(2)}}{I_2}\right|_{I_1=0}$$



$$\Phi_m'^{(2)} = \frac{N_2 I_2}{\frac{3}{2}\mathcal{R}} \cdot \frac{\mathcal{R}}{2\mathcal{R}} = \frac{N_2 I_2}{3\mathcal{R}}$$

$$M = \frac{N_1 N_2}{3\mathcal{R}} = 33.5\ mH$$

$L_1 = 33.5\ mH$

$L_2 = 268\ mH$

$M = 33.5\ mH$

Risolvendo il sistema di eq.

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega |M| \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = j\omega |M| \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = j X_c \bar{I}_2 \end{cases}$$

si ricava:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = j\,33.5 \cdot 2 + j\,33.5\,\bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = j\,33.5 \cdot 2 + j\,268\,\bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = j\,10\,\bar{I}_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{V}_1 = j\,58.3 \text{ V} = 58.3 \angle 90^\circ \text{ V}$$

$$\bar{V}_2 = -j\,2.6 \text{ V} = 2.6 \angle -90^\circ$$

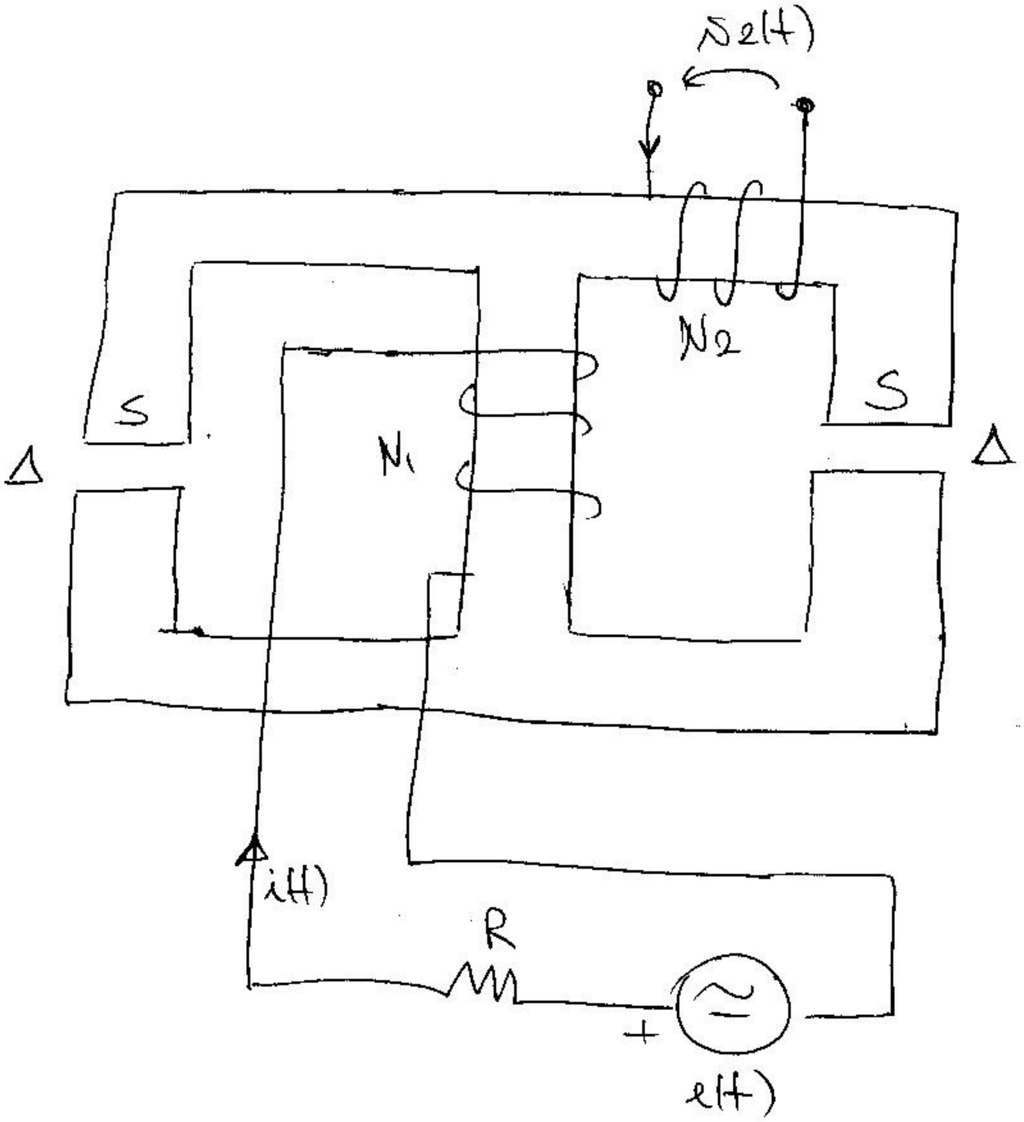
$$\bar{I}_2 = -0.26 \text{ A}$$

$$i_2(t) = -0.26 \text{ A}$$

$$v_1(t) = 58.3\sqrt{2}\ \text{sen}\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$$

$$v_2(t) = 2.6\sqrt{2}\ \text{sen}\left(1000t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$$

Esercizio 3



$e(t) = 100\sqrt{2}\ \text{sen}\ 1000t$

$R = 1\,k\Omega$

$N_1 = 1000$

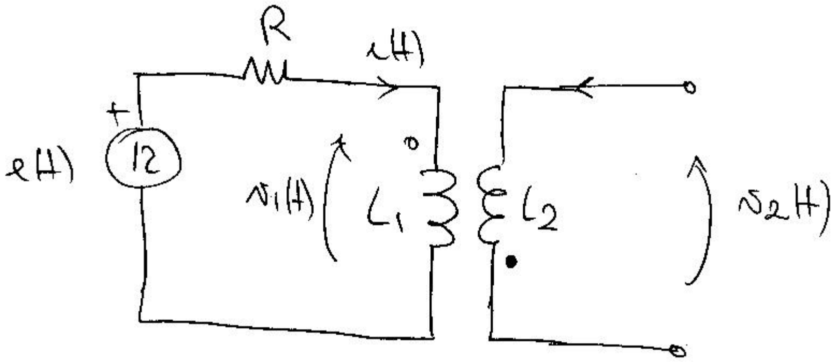
$N_2 = 100$

$\Delta = 0.5\,mm$

$S = 20\,cm^2$

Calcolare $v_2(t)$

Circuito elettrico :



Nel dominio fasoriale:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I} \\ \bar{V}_2 = -j\omega |M| \bar{I} \\ \bar{E} - R\bar{I} = \bar{V}_1 \end{cases}$$

caratteristica del trasformatore con $\bar{I}_2 = 0$

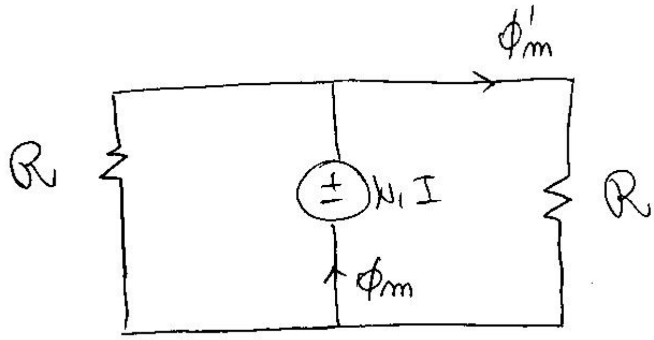
$$\Downarrow$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L_1}$$

$$\bar{V}_2 = -j\omega |M| \cdot \frac{\bar{E}}{R + j\omega L_1} \quad ; \ \bar{E} = 100\,V$$

È sufficiente calcolare soltanto L_1 e M

Per calcolare tali coefficienti utilizzo il CIRCUITO ELETTRICO ASSOCIATO AL CIRCUITO MAGNETICO



$$R = \frac{\Delta}{\mu_0 \cdot S} = 1.98 \cdot 10^5 \left[H^{-1} \right]$$

- CALCOLO L_1

$$L_1 = \frac{\Phi_{11}}{I_1} = \frac{N_1 \phi_m}{I_1}$$

$$\phi_m = \frac{N_1 I}{\frac{R}{2}} = \frac{2 N_1 I}{R}$$

$$L_1 = \frac{2 N_1^2}{R} = 10 H$$

- CALCOLO M

$$|M| = \frac{|\Phi_{21}|}{I_1} = \frac{N_2 |\phi'_m|}{I_1}$$

$$|\phi'_m| = \frac{N_1 I}{R} = \frac{\phi_m}{2}$$

$$|M| = \frac{N_1 N_2}{R} = 0.5 H$$

$$\bar{V}_2 = -j\omega |M| \frac{\bar{E}}{R + j\omega L} = -4.95 - j0.49 \text{ V}$$

$$\bar{V}_2 = 4.97 \angle -174.36°$$

$$v_2(t) = 4.97\sqrt{2} \sin(1000t - 174.36°) \text{ V}$$